Μαθημα 22º 22/12/2017

Πιθανοτητες

## Μεθοδος Μετασχηματισμου

τ.μ $X$ ζητω κατανομη $Y=g(X)$

1) Τιμες $X$: $x \in I$, $g(I)=\{y: y=g(x)\}$

Η $g$ ειναι 1-1 οποτε $\exists\, g^{-1}$

2) $\frac{d}{dy} g^{-1}(y)$ συνεχης και $\frac{d}{dy} g^{-1}(y) \neq 0$

Τοτε εχει σ.π.π

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| \quad , y \in g(I)$$

Παραδειγμα

Εστω τ.μ $X \sim U(0,1)$, ζηταμε την κατανομη της $Y=g(X)=e^X$

Η σ.π.π εχει τυπο

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , x \in (a,b) \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} 1 & , 0<x<1 \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$$

απαντηση

Τιμες $X$ : $x \in (0,1) = I$

Τιμες $Y$ : $x \in (0,1)$ και $y=g(x)=e^x$

γνωριζουμε οτι $e^x$ γν. αυξουσα αρα $y \in (\underbrace{1}_{\text{για } x=0},\overbrace{e}^{\text{για } x=1})=g(I)$

Θεωρουμε λοιπον το μετασχηματισμο $y=g(x)=e^x$

Η $g$ ειναι 1-1 αφου η $e^x$ ειναι γνησιως αυξουσα

Θα βρουμε την αντιστροφη: $x=g^{-1}(y)=\log y$ $(\log y = \ln)$

με $y \in g(I)=(1,e)$

$\frac{d}{dy} g^{-1}(y) = \frac{d}{dy} \log y = \frac{1}{y} \neq 0$ και συνεχης για $y \in g(I)=(1,e)$

Επομενως η σ.π.π ειναι

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| = f_X\left(\frac{1}{y}\right) \cdot \left|\frac{1}{y}\right| = \frac{1}{y} \quad , y \in (1,e)$$

Συνοπτικα εχουμε

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y} & , y \in (1,e) \\ 0 & , \text{αλλου} \end{cases}$$

→ Ελεγχος

Ειναι πραγματι η $f_Y$ σ.π.π?

① $f_Y(y) \geq 0 \quad \forall y$

② $\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)\,dy = \int_1^e \frac{1}{y}\,dy = [\ln y]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1$

Ερωτημα:

Τι γινεται αν η g δεν ειναι 1-1 στο διαστημα I;

Προταση

Εστω συνεχης τ.μ X με σ.π.π $f_X$ και συνολο τιμων της X στο $I \subseteq \mathbb{R}$.

Θεωρουμε το μετασχηματισμο $y = g(x)$ και εστω $\{I_1, I_2, \ldots, I_\nu\}$ μια διαμεριση του I ($I_i \cap I_j = \emptyset$ , $\bigcup_{i=1}^{\nu} I_i = I$) τετοια ωστε:

① ο μετασχηματισμος $y = g(x)$ ειναι 1-1 μετασχηματισμος του $I_i$ στο $g(I_i) = \{y : y = g(x) , x \in I_i\}$

② Αν $g_i^{-1}$ ειναι ο αντιστροφος μετασχηματισμος της $g(x)$ για $x \in I_i$ υποθετουμε οτι $\frac{d}{dy} g_i^{-1}(y)$ υπαρχει ειναι συνεχης

και οτι $\frac{d}{dy} g_i^{-1}(y) \neq 0$ , $\forall y \in g(I_i)$

Τοτε :

η $Y=g(X)$ ειναι συνεχης με συνολο τιμων το $g(I)$ και η σ.π.π της $Y$ ειναι:

$$f_Y(y) = \sum_{k=1}^{n} f_X(g_i^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{d}{dy} g_i^{-1}(y) \right| \quad , y \in g(I)$$

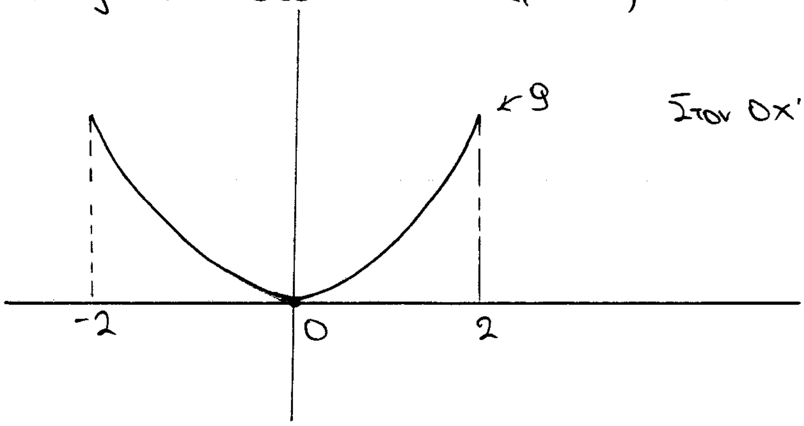
Παρατηρηση

τμ $X$ με συνολο τιμων $I=(-2,2)$

$Y = X^2$

Θεωρουμε το μετασχηματισμο $y=g(x)=x^2$ , $x \in I=(-2,2)$

Ειναι η $g$ 1-1 στο $I=(-2,2)=;$




Στον Ox'

Ειναι ομως 1-1 στο $I_1=(-2,0)$ και $I_2=(0,2)$

Παραδειγμα

Εστω τ.μ $X$ συνεχης με σ.π.π $f_X(x) = \frac{x+1}{2}$ , $-1<x<1$ , $x \neq 0$

γιατι για $x=0$ $\Rightarrow y=0 \Rightarrow$ το $y$ παυει να ειναι τ.μ

Ζητειται η κατανομη της $y=x^2$

απαντηση

Τιμες $X$ : $x \in (-1,1)-\{0\} = I$

Τιμε $Y$ : $y \in g(I) = (0,1)$

Θεωρουμε τον μετασχηματισμο $y=g(x)=x^2$ , $x \in (-1,1)-\{0\}$

Ειναι η $g$ 1-1 στο $I=(-1,1)$;

οχι γιατι για $x^2=y \Rightarrow x=\pm\sqrt{y}$ δηλ εχουμε 2 λυσεις και οχι μια

Θεωρουμε τη διαμερισμη $I_1=(-1,0)$ και $I_2=(0,1)$ και εχουμε οτι η $g$ ειναι γνησιως φθινουσα στο $I_1$ και γνησιως αυξουσα στο $I_2$

Αρα η $g$ ειναι 1-1 στα $I_1$ και $I_2$ ξεχωριστα

Ευρεση της $g^{-1}$ στα $I_1$ και $I_2$

Για $x \in I_1=(-1,0)$:

$$g_1^{-1}(y)=-\sqrt{y}$$

Για $x \in I_2=(0,1)$:

$$g_2^{-1}(y)=\sqrt{y}$$

Επισης

$$\frac{d}{dy}g_1^{-1}(y)=\frac{d}{dy}(-\sqrt{y})=-\frac{1}{2\sqrt{y}}\neq 0 \text{ και συνεχης για } y\in(-1,0)$$

$$\frac{d}{dy}g_2^{-1}(y)=\frac{d}{dy}(\sqrt{y})=\frac{1}{2\sqrt{y}}\neq 0 \text{ και συνεχης για } y\in(0,1)$$

Αρα η $Y=X^2$ ειναι συνεχης τ.μ με σ.π.π

$$f_Y(y)=\sum_{i=1}^{2} f_X(g_i^{-1}(y))\cdot\left|\frac{d}{dy}g_i^{-1}(y)\right|=$$

$$=f_X(-\sqrt{y})\cdot\left|-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right|+f_X(\sqrt{y})\cdot\left|\frac{1}{2\sqrt{y}}\right|=\frac{-\sqrt{y}+1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{y}+1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{y}} \Rightarrow f_Y(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}, \quad y\in(0,1)$$

## (III) Μεθοδος Ροπογεννητριας

Εστω τ.μ $X$ με γνωστη κατανομη, Ζητειται η κατανομη της τ.μ $Y=g(X)$

Η ροπογεννητρια της $Y$:

$$m_Y(t) \overset{op}{=} E(e^{tY}) = E(e^{tg(X)}) = \begin{cases} \sum_x e^{tg(x)} \cdot p_X(x), & t\in\mathbb{R}, X \text{ διακρ.} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tg(x)} f_X(x)\,dx, & t\in\mathbb{R}, X \text{ συν.} \end{cases}$$

Μπορω να βρω την $m_Y$

Αν η $m_Y$ εχει τη μορφη της ροπογεννητριας καποιας γνωστης κατανομης τοτε απο το θεωρημα μονοσημαντου των ροπογεννητριων η κατανομη της $Y$ ταυτιζεται με τη γνωστη κατανομη.

Παραδειγμα

Εστω τ.μ $X$ με κατανομη Gumbel η οποια εχει α.σ.κ
$F_X(x) = \exp\{-\exp[-(x-a)/\sigma]\}$, $x\in\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}$, $\sigma>0$.
Να προσδιοριστει και να αναγνωρισθει η κατανομη της
$Y=\exp[-(X-a)/\sigma]$

απαντηση

Τιμες $Y$: $y>0$

$$F_Y(y) \overset{op}{=} P(Y\le y) = P\left(e^{-\frac{x-a}{\sigma}} \le y\right) = P\left(-\frac{x-a}{\sigma} \le \log y\right) =$$

$$= P(-(x-a) \le \sigma \log y) = P(X \ge a-\sigma\log y) = 1-P(X\le a-\sigma\log y) =$$

$$= 1-F_X(a-\sigma\log y) \Rightarrow F_Y(y) = 1-\exp\left\{-\exp\left[-\frac{a-\sigma\log y-a}{\sigma}\right]\right\} =$$

$$= 1-\exp\{-e^{\log y}\} = 1-\exp(-y) = 1-e^{-y}, \quad y>0$$

Οπότε έχουμε

$$F_Y(y) = 1 - e^{-y} \quad , y > 0$$

η οποία είναι η α.σ.κ της $Exp(1)$. Άρα $Y \sim Exp(1)$

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{x-a}{\sigma}} \cdot e^{-e^{-\frac{x-a}{\sigma}}} \quad , x \in \mathbb{R}$$

$$m_Y(t) = E(e^{tY}) = E\left(e^{te^{-\frac{x-a}{\sigma}}}\right) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{te^{-\frac{x-a}{\sigma}}} \cdot \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{x-a}{\sigma}} \cdot e^{-e^{-\frac{x-a}{\sigma}}} dx \cdot \frac{1}{1-t} \quad , \quad t < 1$$

Θέτουμε $g = e^{-\frac{x-a}{\sigma}}$ ....